

文章编号:1005-3085(2009)05-0806-05

M-P 逆在线性随机方程中的应用*

姚落根^{1,2}, 欧 辉¹, 杨向群¹

(1- 湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙 410081; 2- 湖南商学院信息学院, 长沙 410205)

摘 要: 本文证明了可料过程的 M-P 逆仍然可料。利用 M-P 逆讨论了线性随机方程可料解的结构, 由此求出了扩散模型中的所有等价鞅测度, 并给出了最小逆鞅测度。

关键词: M-P 逆; 扩散模型; 等价鞅测度

分类号: AMS(2000) 60H20; 90A09

中图分类号: F830.9; O211.6

文献标识码: A

1 引言

在金融数学及其他领域研究中, 经常遇到如下线性随机方程

$$\sigma(t)Y(t) = C(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

其中 σ, C 分别是给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上的 $\mathbf{R}^{d \times n}$ 值和 \mathbf{R}^d 值的可料随机过程。我们需要得到 (1) 的所有可料解。(1) 有解 (未必可料) 的充要条件是

$$\text{rank} \sigma(t) = \text{rank}(\sigma(t), C(t)), \quad \forall t \geq 0$$

几乎处处成立。本文利用高等代数中的 M-P 逆来求这个方程 (σ 未必几乎处处满秩) 的可料解。

定义 1 设矩阵 $A \in \mathbf{R}^{d \times n}$, 如果矩阵 $X \in \mathbf{R}^{n \times d}$ 满足如下四个方程

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)' = AX, \quad (XA)' = XA,$$

则称 X 为 A 的 M-P 逆, 记为 A^+ 。

Moore 和 Penrose 已证明, 对任意实矩阵 A , 其 M-P 逆是唯一存在的。下面以引理的形式给出将要用到的性质。

引理 1 设 $A \in \mathbf{R}^{d \times n}$, 则

1) $(A')^+ = (A^+)', A^+ = (A'A)^+A' = A'(AA')^+, (A'A)^+ = A^+(A^+)'$;

2) 如果线性方程组 $Ax = b$ 有解, 则该方程组的所有解可表示为 $x = A^+b + (I_d - A^+A)z$, 其中 z 是任意的 d 维列向量。

对 \mathbf{R}^d 值, 可料随机过程 $M(t) = (M_1(t), \dots, M_d(t))$, 若 $M(t) \in \mathcal{M}_{0,loc}^2$ (初值为 0 的局部平方可积鞅), 则其二次变差过程为

$$\langle M(t) \rangle = \begin{pmatrix} \langle M_1(t), M_1(t) \rangle & \cdots & \langle M_1(t), M_d(t) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle M_d(t), M_1(t) \rangle & \cdots & \langle M_d(t), M_d(t) \rangle \end{pmatrix}.$$

收稿日期: 2008-11-24. 作者简介: 姚落根 (1974年2月生), 男, 博士, 讲师. 研究方向: 数理金融.

*基金项目: 国家自然科学基金 (10571051; 10871064); 湖南省社会科学基金 (08YBB187).

文 [1] 证明了 $\langle M(t) \rangle$ 的 M-P 逆仍然可料, 并且以一个反例来说明, $\langle M(t) \rangle$ 的其他广义逆不一定保持可料性. 受此启发, 本文证明了任意取值于 $\mathbf{R}^{d \times n}$, 可料随机过程的 M-P 逆仍然可料, 并由此求得随机方程 (1) 的所有可料解.

2 $\mathbf{R}^{d \times n}$ 值可料随机过程的 M-P 逆

本节考虑随机过程 σ 的 M-P 逆. 令 $r_t = \text{rank} \sigma(t)$, 则 r 可料^[1]. 按满秩分解定理, 对 $(\omega, t) \in (r = k)$, 存在过程 $F_k(t) \in \mathbf{R}^{d \times k}$, $G_k(t) \in \mathbf{R}^{k \times n}$, 使得

$$\sigma(t) = I_{\{r=k\}} F_k(t) G_k(t),$$

其中 $\text{rank} F_k(t) = \text{rank} G_k(t) = k$. 于是

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{d \wedge n} I_{\{r=k\}} F_k(t) G_k(t).$$

定义 $\sigma(t)^+$ 如下

$$\sigma(t)^+ = \sum_{k=0}^{d \wedge n} I_{\{r=k\}} G_k(t)' [G_k(t) G_k(t)']^{-1} [F_k(t)' F_k(t)]^{-1} F_k(t)'. \quad (2)$$

定理 1 设 $\sigma(t)$ 可料, 则按 (2) 定义的 $\sigma(t)^+$ 是 $\sigma(t)$ 的 M-P 逆, 且 $\sigma(t)^+$ 可料.

证明 容易验证 $\sigma(t)^+$ 满足定义 1 的四个方程. 由 M-P 逆的唯一性, 可得 $\sigma(t)^+$ 是 $\sigma(t)$ 的 M-P 逆. 还需证明 $\sigma(t)^+$ 可料. 因为 $F_k(t)$, $G_k(t)$ 是通过可料过程 $\sigma(t)$ 的连续变换得到的, 故 $F_k(t)$, $G_k(t)$ 可料. 于是, $[G_k(t) G_k(t)']^{-1}$ 和 $[F_k(t)' F_k(t)]^{-1}$ 也可料. 再由 r_t 的可料性, 即可推出 $\sigma(t)^+$ 可料.

接下来考虑随机方程 (1) 的解 (假定其存在解). 首先需区分可料解与非可料解.

定义 2 称 \mathbf{R}^d 值随机过程 $\Theta = \{\Theta(t); t \geq 0\}$ 为方程 (1) 的一般解, 如果

$$P(\{\sigma(t)\Theta(t) = C(t), \forall t \geq 0\}) = 1. \quad (3)$$

如果 Θ 还是可料的, 则称为严格解.

显然, 严格解一定是一般解, 但一般解不一定是严格解.

定理 2 随机方程 (1) 存在严格解的充分必要条件是它存在一般解.

证明 如果 $Y(t)$ 是随机方程 (1) 的严格解, $Y(t)$ 必是方程 (1) 的一般解. 现在设 $Y(t)$ 是随机方程 (1) 的任意一个一般解, 令 $\Theta_0(t) = \sigma(t)^+ C(t)$. 则由定理 1, $\Theta_0(t)$ 是可料过程. 再由

$$\sigma(t)\Theta_0(t) = \sigma(t)\sigma(t)^+ C(t) = \sigma(t)\sigma(t)^+ \sigma(t)Y(t) = \sigma(t)Y(t) = C(t).$$

故 $\Theta_0(t)$ 是随机方程 (1) 的严格解.

下面讨论随机方程 (1) 解的结构. 令

$$\mathcal{A}(\sigma) = \{Y(t) : Y(t) \text{ 是取值于 } \mathbf{R}^n \text{ 的可料过程, 且 } \sigma(t)Y(t) = 0, t \geq 0, a.s.P.\},$$

$$\mathcal{B}(\sigma) = \{(I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t) : Z(t) \text{ 是任意取值于 } \mathbf{R}^n \text{ 的可料过程}\},$$

其中 I_n 是 n 阶单位阵. 因为 $Y(t) \equiv 0 \in \mathcal{A}(\sigma)$, 故 $\mathcal{A}(\sigma)$ 不是空集.

定理3 $\mathcal{A}(\sigma) = \mathcal{B}(\sigma)$.

证明 设 $Y(t) \in \mathcal{A}(\sigma)$, 则由 $(I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Y(t) = Y(t)$, 知 $\mathcal{A}(\sigma) \subset \mathcal{B}(\sigma)$. 再设 $Z(t)$ 是取值于 \mathbf{R}^n 的任意可料过程. 因为

$$\sigma(t)(I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t) = \sigma(t)Z(t) - \sigma(t)\sigma(t)^+ \sigma(t)Z(t) = \sigma(t)Z(t) - \sigma(t)Z(t) = 0,$$

故有 $\mathcal{A}(\sigma) \supset \mathcal{B}(\sigma)$. 定理得证.

定理4 $\Theta(t)$ 是 (1) 的严格解的充要条件是存在 $Y(t) \in \mathcal{A}(\sigma)$, 使得 $\Theta(t) = \Theta_0(t) + Y(t)$.

证明 设 $\Theta(t)$ 是随机方程 (1) 的严格解, 则 $\Theta(t)$ 可料. 令 $Y(t) = \Theta(t) - \Theta_0(t)$, 显然, $Y(t)$ 可料, 且有

$$\sigma(t)Y(t) = \sigma(t)\Theta(t) - \sigma(t)\Theta_0(t) = 0.$$

即 $Y(t) \in \mathcal{A}(\sigma)$. 反之, 设 $Y(t) \in \mathcal{A}(\sigma)$, 则 $\Theta(t) = \Theta_0(t) + Y(t)$ 可料, 且

$$\sigma(t)\Theta(t) = \sigma(t)Y(t) + \sigma(t)\Theta_0(t) = \sigma(t)\Theta_0(t) = C(t).$$

故 $\Theta(t)$ 是随机方程 (1) 的严格解.

由定理3和定理4, 随机方程 (1) 的严格解的通解具有如下形式

$$\Theta(t) = \Theta_0(t) + (I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t), \quad (4)$$

其中 $Z(t)$ 是取值于 \mathbf{R}^n 的任意可料过程.

3 M-P 逆在扩散模型中的应用

考虑如下扩散模型, 市场中有 $d+1$ 种资产, 其价格过程满足如下微分方程

$$\begin{cases} dS_0(t) = r_t S_0(t)dt, & S_0(0) = 1, & 0 \leq t \leq T, \\ dS_i(t) = a_i(t)S_i(t)dt + S_i(t) \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dW_j(t), & S_i(0) = S_i, & i = 1, \dots, d, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$W = \{W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t))', \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$$

是定义在某带 σ -代数流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上的标准布朗运动, $\{\mathcal{F}_t\}$ 是由自然 σ -代数流 $\{\mathcal{F}_t^W\}$ 在概率 P 下的扩张形成的. 假定平均收益率过程 $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_d(t))'$ 、扩散过程 $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n}$ 以及短期利率过程 r_t 都可料, 且 $a(t)$, $\sigma(t)$ 满足使方程 (5) 有唯一强解所需要的条件 (如 Lipschitz 条件). 为简单起见, 记上面的市场模型为 $M(r, a, \sigma)$.

记 $C(t) = a(t) - r_t \vec{1}$, 这里 $\vec{1}$ 是每个分量都为 1 的 d 维矩阵. Q 是等价鞅测度的充要条件是存在可料过程 $\Theta(t)$, $P(\int_0^T \|\Theta(u)\|^2 du < +\infty) = 1$, 使得

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \varepsilon \left(- \int_0^t \Theta(u) dW(u) \right), \quad (6)$$

其中 $\Theta(t) = (\Theta_1(t), \dots, \Theta_n(t))'$ 满足如下的随机方程

$$\sigma(t)X(t) = C(t), \quad P - \text{a.s.} \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

定义3 称取值于 \mathbf{R}^n 的随机过程 $\Theta = \{\Theta(t), 0 \leq t \leq T\}$ 为风险溢价过程, 如果 Θ 可料, 且满足 (7)。

为了求出一个具体的风险溢价过程, 通常对 $\sigma(t)$ 作出许多限制, 目的都是保证 $[\sigma(t)\sigma(t)']^{-1}$ 或者 $[\sigma(t)'\sigma(t)]^{-1}$ 存在。下面我们利用 M-P 逆来解决这个问题。如果记 \mathcal{P} 为 $M(r, a, \sigma)$ 中等价鞅测度的全体, 令

$$\Lambda = \left\{ Z(t) : Z(t) \text{ 是 } d \text{ 维可料过程, 且 } P\left(\int_0^T \|(I_n - \sigma(u)^+ \sigma(u))Z(u)\|^2 du < +\infty\right) = 1 \right\}.$$

定理5 如果 $\Theta_0(t)$ 满足

$$P\left(\int_0^T \|\Theta_0(u)\|^2 du < +\infty\right) = 1.$$

则 $Q \in \mathcal{P}$ 的充要条件是存在 $Z \in \Lambda$, 使得

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \varepsilon\left(-\int_0^t \Theta_0(u) dW(u)\right) \varepsilon\left(-\int_0^t (I_n - \sigma(u)^+ \sigma(u))Z(u) dW(u)\right).$$

证明 首先注意到风险溢价过程 $\Theta(t)$ 具有形式 (4), 且有

$$\begin{aligned} (\Theta_0(t))'(I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t) &= (\sigma(t)^+ C(t))'(I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t) \\ &= (\sigma(t)^+ \sigma(t)\Theta_0(t))'(I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t) = 0. \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} \|\Theta(t)\|^2 &= [\Theta_0(t) + (I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t)]'[\Theta_0(t) + (I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t)] \\ &= \|\Theta_0(t)\|^2 + \|(I_n - \sigma(t)^+ \sigma(t))Z(t)\|^2. \end{aligned}$$

在定理的条件下, 显然

$$P\left(\int_0^T \|\Theta(u)\|^2 du < +\infty\right) = 1 \Leftrightarrow P\left(\int_0^T \|(I_n - \sigma(u)^+ \sigma(u))Z(u)\|^2 du < +\infty\right) = 1.$$

即 $Z \in \Lambda$ 。再由 (6),

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} &= \exp\left\{-\int_0^t \Theta_0(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Theta_0(u)\|^2 du\right\} \\ &= \varepsilon\left(-\int_0^t \Theta_0(u) dW(u)\right) \varepsilon\left(-\int_0^t (I_n - \sigma(u)^+ \sigma(u))Z(u) dW(u)\right). \end{aligned}$$

记与 $Z(t) \equiv 0$ 对应的鞅测度为 Q_0 , 即

$$\frac{dQ_0}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \varepsilon\left(-\int_0^t \Theta_0(u) dW(u)\right).$$

由定理5, 鞅测度之间的差别, 仅仅在于它们对应的可料过程 Z 不同。于是, 选择哪一个鞅测度作为定价测度的问题就转化为求其对应的 Z 。这样一来, 问题就简化了许多。下面的例子说明了这个问题。

例1 在模型 $M(\tau, a, \sigma)$ 中, 最小逆熵鞅测度 (the minimal reverse entropy martingale measure) 为 Q_0 。

最小逆熵鞅测度是最优化问题

$$\min_{Q \in \mathcal{P}} E_P \left(-\ln \frac{dQ}{dP} \right)$$

的解。设 $Q \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} E_P \left(-\ln \frac{dQ}{dP} \right) &= \frac{1}{2} E_P \left\{ \int_0^T [\|\Theta_0(u)\|^2 + \|(I_n - \sigma(u)^+ \sigma(u))Z(u)\|^2] du \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} E_P \left(\int_0^T \|\Theta_0(u)\|^2 du \right). \end{aligned}$$

即 Q_0 是最小逆熵鞅测度。

参考文献:

- [1] Dzharidze K, Spreij P J C. On correlation calculus for multivariate martingales[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1993, 46: 283-299
- [2] 卢同善. 随机泛函分析及应用[M]. 青岛: 青岛海洋大学出版社, 1990
- [3] Karatzas I, Shreve S. Stochastic Calculus for Finance: Continuous-time Models[M]. New York: Springer, 2004
- [4] 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1996
- [5] Vicky H, David H, Sam H. A comparison of q -optimal option prices in a stochastic volatility model with correlation[J]. Review of Derivatives Research, 2005, 8: 5-25

Application of Moore-Penrose Inverse in Linear Stochastic Equation

YAO Luo-gen^{1,2}, OU Hui¹, YANG Xiang-qun¹

(1- College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081;

2- College of Information, Hunan University of Commerce, Changsha 410205)

Abstract: This paper proves that the M-P inverse predictable process is still predictable. By employing the M-P inverse, we discussed the structure of predictable solutions of the linear stochastic equation. All equivalent martingale measures and the minimal reverse entropy martingale measure in a diffusion model are obtained.

Keywords: Moore-Penrose inverse; diffusion model; equivalent martingale measures